Systèmes dynamiques, M1, 2021

Université de Picardie Jules Verne

Systèmes dynamiques (III)

Prop. : Soit X un espace de Baire et $T : X \to X$ un homéo.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) T est transitif ;
ii) $\exists x \in X$ t.q. $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$;
iii) l'ensemble des $x \in X$ t.q. $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$ contient un G_δ-dense.

dém. : • ii) $\Rightarrow$ i). Soit U, V deux parties ouvertes.
Le fait que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}$ t.q. $T^k(x) \in U$ et $T^{k'}(x) \in V$.
En particulier, $T^k(x) \in U \cap \underbrace{T^{k-k'}(V)}_{(T^{k'-k})^{-1}(V)} \neq \emptyset$

• iii) $\Rightarrow$ ii) : clair

• i) $\Rightarrow$ iii) : soit $(U_i)_{i\in I}$ base dénombrable de la topologie de X.

L'homéo. T est transitif $\Rightarrow$ $\forall i \in I$, $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^{-k}(U_i)$ est dense

(les images de U_i par T vont rencontrer n'importe quel U_j, $j \in I$)

$$\Longrightarrow \quad Y := \underbrace{\bigcap_{i\in I}}_{\text{int. dénombrable}} \underbrace{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^{-k}(U_i)\right)}_{\text{dense}}$$ est un G_δ-dense (par la prop. de Baire).

Un point x appartient à Y ssi son orbite $\mathcal{O}(x)$ rencontre chacun des U_i, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$. ∎

Minimalité

(notion encore plus forte d'"indécomposabilité" d'un système dynamique que la transitivité)

Prop. : Soit $T : X \to X$ une application continue sur un espace topologique.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall x \in X$, $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$;

ii) $\forall x \in X$, $\omega(x) = X$;

iii) si $Y \subset X$ est fermé et positivement invariant alors $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.

Déf. :

Si ces conditions sont vérifiées, alors on dit que T est positivement minimale.

dém. : (des 3 équivalences)

- i) ou ii) $\Rightarrow$ iii) :

Supposons $Y \subset X$ est fermé et pos. invariant.
Si $Y \neq \emptyset$, on peut choisir $x \in Y$. Chacun des ensembles $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ et $\omega(x)$ est contenu dans Y

Donc si i) ou ii) est vrai et $Y \neq \emptyset$, alors $\forall x \in Y$, $Y \supset \overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$ (i)

$Y \supset \omega(x) = X$ (ii)

donc dans les deux cas on a bien $Y = X$.

- iii) $\Rightarrow$ i) : on remarque que $\forall x \in X$, $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ est une partie fermée, $\neq \emptyset$ $(x \in \overline{\mathcal{O}^+(x)})$, et positivement invariante, $(\mathcal{O}^+(x)$ est pos. inv. et T continue$)$

donc $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$ (par iii))) ∎

- i) $\Rightarrow$ ii) : $\omega(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\underbrace{\mathcal{O}^+(T^m(x))}_{X}} = X$

Remarque : un système dynamique positivement minimal est positivement transitif.

Prop. : $T : X \to X$ homéo. sur un sp. topo. X. Les propriétés suivantes sont équiv. :

i) $\forall x \in X$, $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$;

ii) $\forall Y$ fermée (globalement) invariante, $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.

$\hookrightarrow T(Y) = Y$

$\rightsquigarrow$ Si les conditions préc. sont vérifiées on dit que T est **minimal**.

Déf. : • Soit $T : X \to X$ une appl. continue sur X espace topo.

Une partie fermée positivement inv. $Y \subset X$ est dite **positivement minimale** si $T|_Y : Y \to Y$ est positivement minimale.

• Si $T : X \to X$ est un homéo., une partie fermée invariante $Y \subset X$ est **minimale** si $T|_Y : Y \to Y$ est minimal.

Prop. : Soit $T : X \to X$ une transformation continue sur X espace topo. compact.

$\rightsquigarrow$ Il existe une partie fermée positivement minimale $Y \subset X$.

dém. : notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées non vides positivement invariantes.

(Il n'est pas vide car $X \in \mathcal{F}$)

Remarquons qu'il est inductif pour l'inclusion : en effet, si $(Y_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$ est fermée (int. de fermés) positivement inv.

et $Y \subset Y_i$, $\forall i \in I$.

Pour m.q. Y est dans $\mathcal{F}$, il reste à vérifier que $Y \neq \emptyset$.

C'est une conséquence de la compacité de X et du fait que $\forall J \subset I$ fini, $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ (puisque $(Y_i)_{i \in I}$ totalement ordonnée).

$\rightsquigarrow$ on a bien $Y \in \mathcal{F}$ (on a donc que Y est un minorant de $(Y_i)_{i \in I}$).

Par le lemme de Zorn, on conclut à l'existence d'un élément minimal de $\mathcal{F}$. ∎

2) Homéomorphisme du cercle

Soit $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (revêtement)

$$x \longmapsto x \bmod 1$$

On dit que le point x est un relevé de $\pi(x) \in \mathbb{T}^1$.

($\mathbb{R}$ est le revêtement universel de $\mathbb{T}^1$)

Prop.: Soit $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ continue, alors il existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu

t.q. $\pi \circ F = f \circ \pi$, ($F$ est un relevé de f)

i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{T}^1 \end{tikzcd}$$

- Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un relevé de $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ et $p \in \mathbb{Z}$,

alors $F + p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi un relevé de f.

$$x \longmapsto F(x) + p$$

- En fait, $\{F + p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des relevés de f :

en effet, si F_1 et F_2 sont deux relevés, alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\pi \circ F_1(x) = f \circ \pi(x) = \pi \circ F_2(x)$$

donc $F_2(x) - F_1(x) = p(x) \in \mathbb{Z}$

mais $F_2 - F_1$ est C^0 et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (discret) donc $F_2 - F_1$ est constante :

$$F_2 = F_1 + p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

- Si F est un relevé de f, on note $d(x) := F(x+1) - F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Comme $\pi \circ F = f \circ \pi$, on déduit que $d(x) \in \mathbb{Z}$ $\left(\pi \circ F(x+1) - \pi(F(x)) \right.$

$= f \circ \pi(x+1) - f \circ \pi(x)$

$\left. = f \circ \pi(x) - f \circ \pi(x) = 0 \text{ mod } 1 \right)$

et comme d est continue, on déduit que $d(x) = d \in \mathbb{Z}$ est constante.

De plus, d est indépendant du choix du relevé

$$\left((F+p)(x+1) - (F+p)(x) = F(x+1) - F(x) + \cancel{p} - \cancel{p} = d(x) \right)$$

On appelle d le degré de f et on le note $\deg(f)$.

Propriétés :

i) si $f, g : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ continues, alors $\deg(g \circ f) = \deg(g) \times \deg(f)$

(exercice)

ii) si $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ est un homéo, alors $\underbrace{\deg(f \circ f^{-1})}_{(i) \Rightarrow \deg(f)\deg(f^{-1})} = \deg(id) = 1$

et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relevé de f

$id(x+1) - id(x) = 1$

donc $\underset{\mathbb{Z}^*}{\deg(f)} \, \underset{\mathbb{Z}^*}{\deg(f^{-1})} = 1$ donc soit $\deg(f) = 1$

soit $\deg(f) = -1$

$\rightsquigarrow$ si $\deg(f) = 1$: F est un homéo $\nearrow$ de $\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ si $\deg(f) = -1$: F ——— $\searrow$ de $\mathbb{R}$ ($F \circ F$ est $\nearrow$)

$\rightsquigarrow$ Dans la suite on va s'intéresser au cas où $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ est un homéo de $\mathbb{T}^1$ avec $\deg(f) = 1$

On note $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des homéo. de $\mathbb{T}^1$ de degré 1

et $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ l'ensemble de leurs relevés $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Si $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$, et $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ relève f,

alors F est un homéo. croissant de $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x+1) - F(x) = 1$$

i.e. $F \circ T_1 = T_1 \circ F$, où $T_1 : x \mapsto x+1$.

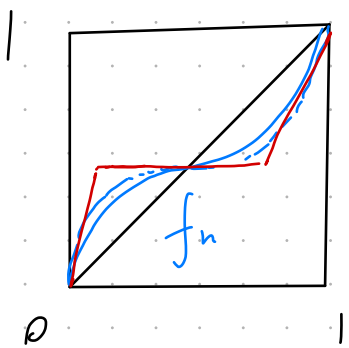
$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) = \{ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homéo. t.q. $F \circ T_1 = T_1 \circ F \}$

Prop. : pour la topo. de la CV uniforme, $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ et $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ sont des groupes topologiques métrisables complets.

$\rightsquigarrow$ Sur $\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$: $d_\infty(F,G) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$

$\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$: $d_\infty(f,g) = \sup_{[x]\in\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^1}(f([x]), g([x]))$

Pb : les homéo ne sont pas un espace fermé pour d_∞ :



$\rightsquigarrow$ $d(F,G) = \mathrm{Max}\left(d_\infty(F,G),\ d_\infty(F^{-1},G^{-1})\right)$

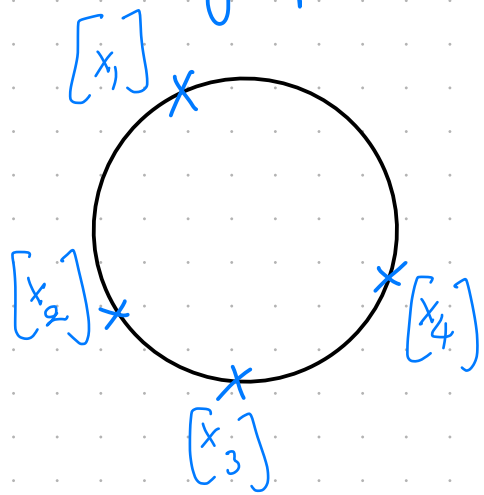
$d(f,g) = \mathrm{Max}\left(d_\infty(f,g),\ d_\infty(f^{-1},g^{-1})\right)$.

$\rightsquigarrow$ d induit la même topo. que d_∞ mais dans ce cas, complet.

Les applications $(f,g) \mapsto f \circ g$ sont continues.

$f \mapsto f^{-1}$

Ordre cyclique :



des points $[x_1], \dots, [x_k] \in \mathbb{T}^1$ sont cycliquement ordonnés si $\exists\, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ relevés de ces points t.q.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_1 + 1.$$

Dans ce qui suit on va définir la notion de nombre de rotation :

de manière informelle, pour tout homéo. f du cercle $\mathbb{T}^1$, $\forall x \in \mathbb{T}^1$, les itérés $(f^k(x))_k$ de x vont "tourner" autour cercle (un peu comme pour une rotation)

$\rightsquigarrow$ le nombre de rotation mesure la vitesse "moyenne" de rotation.

Le nombre de rotation (Poincaré, 1885)

Thm : soit $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, alors il existe $\rho \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

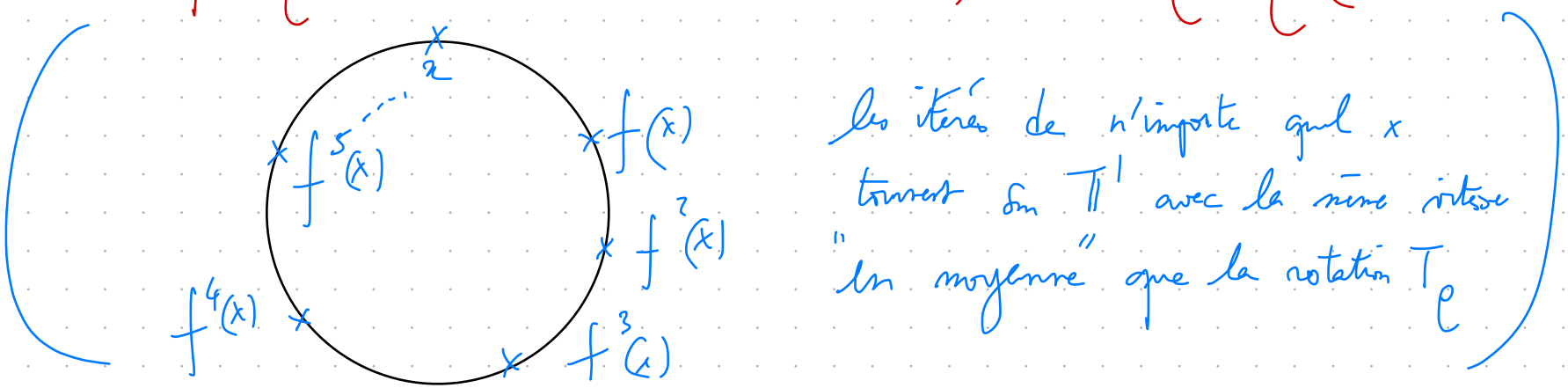
$$\boxed{-1 < \underbrace{F^n(x) - x - n\rho}_{F^n(x) - T_\rho^n(x)} < 1 .}$$

où $T_\rho : x \mapsto x + \rho$ (rotation d'angle ρ)

En particulier,

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \rho \qquad (\Rightarrow \rho \text{ est unique})$$

On dit que ρ est le nombre de rotation de F ; on note $\rho = \rho(F)$.



les itérés de n'importe quel x tournent sur $\mathbb{T}^1$ avec la même vitesse "en moyenne" que la rotation T_ρ

dém. : notons $\Delta_F(x) = F(x) - x$.

Puisque $F \circ T_1(x) = T_1 \circ F$, Δ_F est 1-périodique.

Lemme : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $-1 < \Delta_F(x) - \Delta_F(y) < 1$ $(*)$

dém. : par périodicité, on suppose $y \in [x, x+1[$.

$$F \begin{cases} x \leq y < x+1 \\ F(x) \leq F(y) < F(x+1) = F(x) + 1 \end{cases}$$

d'où $\left.\begin{array}{l} -1 < F(x) - F(y) \leq 0 \\ 0 \leq y - x < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 < \Delta_F(x) - \Delta_F(y) < 1$ ∎

$\rightsquigarrow \forall k \geq 0$, on note $\begin{cases} m_k := \min\limits_{x \in \mathbb{R}} \Delta_{F^k}(x) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} \left(F^k(x) - x\right) \\ M_k := \max\limits_{x \in \mathbb{R}} \Delta_{F^k}(x) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} \left(F^k(x) - x\right). \end{cases}$

$\forall\, k, k' > 0$, on a

$$F^{k+k'}(x) - x = \left(F^{k}(F^{k'}(x)) - F^{k'}(x)\right) + \left(F^{k'}(x) - x\right)$$

$$\Delta_{F^{k+k'}}(x) = \underbrace{\Delta_{F^{k}}(F^{k'}(x))}_{\geq m_k} + \underbrace{\Delta_{F^{k'}}(x)}_{\geq m_{k'}}$$

d'où $m_{k+k'} \geq m_k + m_{k'}$.

De même, $M_{k+k'} \leq M_k + M_{k'}$.

Par récurrence, $k' \cdot m_k \leq m_{kk'} \leq M_{kk'} \leq k M_{k'}$, $\forall\, k, k' > 0$.

$$\frac{m_k}{k} \leq \frac{M_{k'}}{k'}, \quad \forall\, k, k' > 0.$$

On applique lemme préc. $(*)$ à F^k :

on prend x t.q. $\Delta_{F^k}(x) = m_k$ et y t.q. $\Delta_{F^k}(y) = M_k$

$$\forall x, y, \quad -\frac{1}{k} < \frac{\left(F^k(x) - x\right)}{k} - \frac{\left(F^k(y) - y\right)}{k} < \frac{1}{k} \implies \left|\frac{m_k}{k} - \frac{M_k}{k}\right| < \frac{1}{k}.$$

$$\left(\text{et} \quad 0 \leq \frac{M_k}{k} - \frac{m_k}{k} < \frac{1}{k}\right)$$

On en déduit : $\displaystyle\sup_k \frac{m_k}{k} = \inf_{k'} \frac{M_{k'}}{k'}$.

Si on note ρ ce nombre, $\forall k > 0$, on a :

$$\frac{m_k}{k} \leq \rho \leq \frac{M_k}{k},$$

donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\, z_k \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{k}\underbrace{\left(F^k(z_k) - z_k\right)}_{\Delta_{F^k}(z_k)} = \rho.$$

(il existe un point $z_k \in \mathbb{R}$ qui tourne exactement à la vitesse ρ).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors par (*) : (lemme préc. pour F^k et $y = z_k$)

$$-\frac{1}{k} < \left(\frac{F^k(x) - x}{k}\right) - \underbrace{\left(\frac{F^k(z_k) - z_k}{k}\right)}_{=\rho} < \frac{1}{k}$$

$$\Longrightarrow \quad -1 < F^k(x) - x - k\rho < 1$$

(on peut appliquer cet encadrement à $x' = F^{-k}(x)$ à la place de x on obtient l'encadrement souhaité pour les entiers négatifs :

$$-1 < F^k(\underbrace{F^{-k}(x)}_{x}) - F^{-k}(x) - (-k\rho) < 1$$

$$-1 < F^{-k}(x) - x - k\rho < 1$$

) ■

Remarque : la preuve montre que $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$\rho(F) = \frac{p}{q} \iff \exists z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F^q(z) = z + p. \qquad (*)$$

En effet, $\boxed{\Longrightarrow}$ cf. dém. : $\exists z_k$ t.q. $\frac{1}{k}\left(F^k(z_k) - z_k\right) = \rho$ avec $\rho = \frac{p}{q}$ et $k = q$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $F^q(z) = z + p$, alors $\forall k > 0$,

$$F^{kq}(z) = F^{(k-1)q}(\underbrace{F^q(z)}_{z+p}) = \dots = z + kp \qquad (\text{réc.})$$

$$G \quad \lim_{k' \to +\infty} \frac{F^{k'}(z) - z}{k'} = \rho(F) \qquad (\text{par déf.})$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{F^{kq}(z) - z}{kq} = \frac{p}{q}$$

$(k' = kq,\ k \to +\infty)$

$$\frac{\cancel{z} + kp - \cancel{z}}{kq} = \frac{p}{q}$$

$\blacksquare$

Remarque : $q > 0$.

$$(\cdot) \begin{cases} \cdot\ \rho(F) < \frac{p}{q} \iff \forall z \in \mathbb{R},\ F^q(z) < z + p = \left(T_{p/q}\right)^q(z) \\ \cdot\ \rho(F) > \frac{p}{q} \iff \forall z \in \mathbb{R},\ F^q(z) > z + p. \end{cases}$$

En effet, si $\rho(F) \neq \frac{p}{q}$, alors d'après $(*)$

$\forall z,\ F^q(z) \neq z + p.$

$\nearrow$ soit $F^q(z) < z + p$, $\forall z \in \mathbb{R}$, (TVI)
(cas (i))

$\searrow$ soit $F^q(z) > z + p$, $\forall z \in \mathbb{R}$.
(cas (ii))

Cas (i) : $\exists\, z_q$ t.q. $F^q(z_q) = z_q + q\rho(F)$:

$$\underbrace{F^q(z_q)}_{z_q + q\rho(F)} < z_q + p$$

d'où $\rho(F) < \frac{p}{q}$.

Idem pour Cas (ii). ∎

Propriétés : $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$.

(à faire en exercice)

1) $\rho(F^q) = q\rho(F)$, $\forall q \geq 1$.

2) $\rho(F+p) = \rho(F) + p$, $\forall p \in \mathbb{Z}$.

indépendant du relevé par 2)

3) $\forall G \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, $\rho(G \circ F \circ G^{-1}) = \rho(F)$

4) $F \longmapsto \rho(F)$ monotone et continue
$(\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R})$ $\rightsquigarrow$ $\forall x,\ F(x) \leq G(x) \Rightarrow \rho(F) \leq \rho(G)$.

5) Si $f \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{T}^1)$, $\boxed{\rho(f) := \rho(F) \bmod 1}$, $\forall F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ relevant f.